УДК 519.21.248+57+574

В. В. Рыжаков, М. В. Рыжаков

ПРИЛОЖЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ *Q*-МАТРИЦ В ЭКОЛОГИИ И БИОЛОГИИ ПРИ ДИАГНОСТИРОВАНИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ СИСТЕМ С ДЛИТЕЛЬНЫМ СРОКОМ ЖИЗНИ (ПРИМЕНЕНИЯ) И С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Аннотация. Излагаются аналитические положения диагностирования (прогнозирования) систем с длительным сроком жизни (применения) с использованием осредненных *Q*-матриц. Подробно раскрываются методические особенности осреднения элементов *Q*-матриц и предлагается алгоритм, синтезированный с их использованием, на основе предельной теоремы для счетных однородных цепей Маркова (о мажорантной сходимости), который позволяет диагностировать и прогнозировать состояния системы по параметру надежности. Все аналитические результаты иллюстрируются численными экспериментами. Их результаты подтверждают достаточную чувствительность предложенного алгоритма к вариации исходных данных.

Ключевые слова: диагностирование, прогнозирование, вероятность, система, *Q*-матрица, цепи Маркова, экология, биология.

V. V. Ryzhakov, M. V. Ryzhakov

EMPLOYMENT OF AVERAGED Q-MATRICES IN ECOLOGY AND BIOLOGY WHEN DIAGNOSING AND FORECASTING LONG-LIFE SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF STATES

Abstract. The article contains analytical guidelines of diagnosing (forecasting) long-life systems with the use of average Q-matrices. Provided are details of methodological peculiarities of averaging elements of Q-matrices. The article offers the algorithm synthesized with their use as based on the limit theorem for numerical homogeneous Markov chains (on majorant convergence) allowing of diagnosing and forecasting system conditions according to stability parameter. All analytical results are illustrated by numerical experiments. Their results prove sufficient response of the offered algorithm to the given data variations.

Key words: diagnosing, forecasting, probability, system, Q-matrix, Markov chains, ecology, biology.

В качестве сферы приложений предлагаемой теории и реализации алгоритмов в данной статье рассматриваются биологические или экологические системы с длительным сроком жизни (существования): биологические возобновляются, а экологические могут ремонтироваться. При этом для иллюстрации методологии будем рассматривать системы, состоящие из двух блоков, что не повлияет на общность результатов. Блоки принимают одно из двух состояний, а система в соответствии с этим будет принимать три состояния (при условии, что процессы, происходящие в системах, ординарны). Состояние С1 – все блоки функционируют (проявляют свои свойства) в номинальном режиме (состоянии); состояние С2 – первый блок выходит из номинального состояния, а второй блок остается при этом в номинальном режиме (состоянии); состояние С3 – первый блок находится в номинальном режиме (состоянии), а второй блок выходит из номинального состояния. В силу ординарности оба блока одновременно не выходят из номинального состояния.

Вначале рассмотрим общие теоретические положения предлагаемых методов диагностирования и прогнозирования. Далее будем учитывать, что прогнозирование основывается на многократном диагностировании. В качестве параметров систем, по которым они диагностируются, будут использованы вероятности состояний.

Известно, что Q-матрицы относятся к аппарату цепей Маркова с непрерывным временем. При их использовании можно выразить матрицы вероятностей переходов систем длительного существования (применения) из одного состояния в другое в виде матричной экспоненты [1]

$$P(t) = e^{t \cdot Q}. \tag{1}$$

В связи с тем, что исследуемые системы имеют конечное число состояний, P (t)- и Q-матрицы также конечные. В этом случае элементы (q_{ij}) Q-матрицы должны обладать свойствами

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} q_{ii} \le 0; & (\text{а}) \\ \sum\limits_{j,j \ne i}^{N} q_{ij} = -\sum\limits_{i=1}^{N} q_{ii}; & (\text{в}) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij} = 0. & (\text{c}) \end{cases} \tag{2}$$

В работе [1] также указывается, что условие (2в) может быть представлено и в следующем выражении:

$$-\sum_{j,j \ne i}^{N} q_{ij} = \sum_{i=1}^{N} q_{ii}. \tag{3}$$

Приведем краткие аналитические описания свойств зависимости (1). Из (1) следуют формулы Колмогорова

$$P'(t) = P(t) \cdot Q; \tag{4}$$

$$P'(t) = Q \cdot P(t). \tag{4а}$$

Так как при $t = 0$

$$P(t)_{t=0} = P(0) = E, \tag{5}$$

где E – единичная матрица,

$$P'(t)_{t-0} = P'(0) = Q. \tag{6}$$

Отсюда имеем

$$g_{ij} = P'_{ij}(0). \tag{7}$$

Далее будем использовать теорему о мажорантной сходимости (для счетных однородных цепей Маркова)

$$P_{ci}^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} P_{cj}^{(n-1)} \cdot P_{ji}, \tag{8}$$

где n – номер временного сечения (t_n), в котором определяется вероятность i-го состояния системы $\left(P_{ci}^{(n)}\right)$; ($n$ – 1) – номер предшествующего временного сечения (t_{n-1}); P_{ji} – вероятность перехода из j-го состояния в i-е, $j \in \{1,...,N\}$.

Как решение системы (8) определим элементы $\left(P_{ij}\right)$, используя при этом в качестве исходных экспериментальных данных $\lambda_{1б}, \lambda_{2б}$ – интенсивности переходов из номинального состояния в неноминальное первого и второго блоков – и $\lambda_{в1}, \lambda_{в2}$ – интенсивности переходов в номинальное состояние первого и второго блоков соответственно в процессе восстановления. Вероятности указанных переходов полагаем экспоненциальными.

В момент $t = t_{\gamma=1}$ будем иметь матрицу переходов вида

$$P^*\left(t_{\gamma=1}\right) = \begin{pmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* & P_{13}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* & 0 \\ P_{31}^* & 0 & P_{33}^* \end{pmatrix}, \tag{9}$$

элементы которой – решение системы (8):

$$\begin{cases} P_{11}^* = P_{c1}^{(1)} \Big/ P_{c1}^{(0)} = e^{-(\lambda_{1б}+\lambda_{2б})\cdot e_1} \Big/ 1; & \text{(a)} \\ P_{12}^* = P_{c2}^{(1)} \Big/ P_{c1}^{(0)} = e^{-\lambda_{2б}t_1} - e^{-(\lambda_{1б}+\lambda_{2б})t_1}; & \text{(в)} \\ P_{13}^* = 1 - P_{11}^* - P_{12}^*; & \text{(c)} \\ P_{21}^* = {}^*P_{c1}^{(2)} \Big/ {}^*P_{c2}^{(2)} = e^{-(\lambda_{1б}+\lambda_{в1})(t_2-t_1)} \cdot e^{-\lambda_{2б}t_2} \Big/ e^{\lambda_{2б}(t_2-t_1)} \cdot e^{-\lambda_{в1}(t_2-t_1)}; & \text{(d)} \\ P_{22}^* = 1 - P_{21}^*; & \text{(e)} \\ P_{31}^* = {}^*P_{c1}^{(4)} \Big/ {}^*P_{c3}^{(4)} = e^{-\lambda_{1б}(t_4-t_1)} \cdot e^{-(\lambda_{2б}+\lambda_{в2})(e_4-e_3)} \Big/ e^{-\lambda_{1б}(t_4-t_1)} \cdot e^{-\lambda_{в2}(t_4-t_3)}; & \text{(f)} \\ P_{33}^* = 1 - P_{31}^*, & \text{(g)} \end{cases} \tag{10}$$

где γ – символ, учитывающий номер интервала формирования матрицы $\left(P_{ij}\right)^{\gamma}$, $\gamma \in \{1,2,...\}$; другой символ в показателе – $(*)$ – значение, полученное в результате обработки экспериментальных данных.

Выражения (10c), (10e) и (10g) учитывают требование ординарности событий в системе.

На первом этапе $\gamma = 1$ и

$$t_{\gamma=1} = t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + (t_4 - t_3) = t_4. \tag{11}$$

В моменты $t = 0$, t_1, t_2, t_3, t_4 оцениваются вероятности состояний системы и соответствующие значения P_{ij} матрицы (9).

С момента $t = t_4$ используется матрица вероятностей переходов (9).

После прохождения интервала времени $[t_4; 2t_4]$ будет использоваться матрица переходов

$$P^*(t_{\gamma=2}) = \left(P^*(t_{\gamma=1})\right)^2. \tag{12}$$

При произвольном номере интервала (γ) с момента $\gamma \cdot t_4$ до момента $(\gamma+1) \cdot t_4$ будет работать матрица

$$P^*(t_\gamma) = \left(P(t_{\gamma=1})\right)^\gamma, \tag{13}$$

где $t_\gamma = \gamma \cdot t_4$.

И далее, для исследования поведения системы в любой момент времени на отрезках $[t_4; 2t_4], \ldots, [t_\gamma; t_{\gamma+1}]$ за начало отсчета времени в (1) будем принимать начало указанных интервалов. Тогда, используя (6), получим элементы Q-матрицы и с учетом этого найдем соответствующие элементы матрицы (1), отвечающие различным значениям γ.

В качестве системы, используемой в экологических исследованиях полисостава газовых сред, можно использовать систему, состоящую из блоков различных сенсоров и блока программно-преобразующих устройств [2], а в качестве биологической системы – систему, состоящую из двух различных групп (видов) организмов, но образующих сбалансированное сообщество: нарушение баланса по вине того или иного вида приводит к смене состояний, которые характеризуются определенными вероятностями, например, амеб [3].

Изложенную методологию конкретизируем. Обозначим элементы матрицы P^γ как $P_{ij}^{(\gamma)}$ и введем осредненные элементы $\left(\bar{g}_{ji}^{(\gamma)}\right)$ матрицы $\bar{Q}^\gamma$, соответствующие интервалу $\left[t_\gamma; t_{(\gamma+1)}\right]$. В соответствии с (6) осредненные элементы определим так:

$$\bar{q}_{ij}^{(\gamma)} = \frac{P_{ij}^{*(\gamma+1)} - P_{ij}^{*(\gamma)}}{t_{(\gamma+1)} - t_\gamma}, \tag{14}$$

или

$$\bar{q}_{ij}^{(\gamma)} = \frac{P_{ij}^{*(\gamma+1)} - P_{ij}^{*(\gamma)}}{t_{(\gamma=1)}}. \tag{15}$$

После таких расчетов будем иметь осредненную $\bar{Q}$-матрицу, соответствующую исследуемой системе, на отрезке времени $\left[t_{(\gamma)};t_{(\gamma+1)}\right]$:

$$\bar{Q}^{(\gamma)}=\begin{pmatrix}\bar{q}_{11}^{(\gamma)} & \bar{q}_{12}^{(\gamma)} & \bar{q}_{13}^{(\gamma)}\\ \bar{q}_{21}^{(\gamma)} & \bar{q}_{22}^{(\gamma)} & q_{23}^{(\gamma)}\\ \bar{q}_{31}^{(\gamma)} & \bar{q}_{32}^{(\gamma)} & \bar{q}_{33}^{(\gamma)}\end{pmatrix}, \qquad (16)$$

которая позволит записать выражение (1) в виде

$$\bar{P}\left(t_{\gamma}^{*}\right)=e^{t_{\gamma}^{*}\cdot\bar{Q}^{(\gamma)}}, \qquad (17)$$

где t_{γ}^{*} – временной параметр, который определяется так:

$$t_{\gamma}^{*}=t-t_{\gamma}, \qquad (18)$$

t – текущее время с началом отсчета $t=0$.

При известных элементах $\bar{Q}^{(\gamma)}$-матрицы можно определить элементы матрицы вероятностей переходов в любой момент времени $t_{\gamma}^{*}\in\left[t_{\gamma};t_{(\gamma+1)}\right]$, используя выражение

$$P_{ij}\left(t_{\gamma}^{*}\right)=e^{t_{\gamma}^{*}\bar{q}_{ij}}, \qquad (19)$$

которое, в свою очередь, позволит оценить (спрогнозировать) вероятность пребывания системы в том или ином состоянии в перспективе [4]:

$$P_{ci}\left(t_{\gamma}^{*}\right)=\sum_{j=1}^{N}P_{cj}\left(t_{\gamma}\right)\cdot P_{ji}\left(t_{\gamma}^{*}\right)=\sum_{j=1}^{N}P_{cj}\left(t_{\gamma}\right)\cdot e^{t_{\gamma}^{*}\cdot\bar{q}_{ji}}, \qquad (19а)$$

или в ретроспективе:

$$P_{ci}\left(t_{(\gamma+1)}-t_{\gamma}^{*}\right)=\sum_{j=1}^{N}P_{cj}\left(t_{(\gamma+1)}\right)\cdot P_{ji}\left(-t_{\gamma}^{*}\right)=\sum_{j=1}^{N}P_{cj}\left(t_{(\gamma+1)}\right)\cdot e^{-t_{\gamma}^{*}\cdot\bar{q}_{ji}}, \qquad (19в)$$

где t_{γ} соответствует (n) в (19а и 19в), а t_{γ}^{*} – произвольному значению времени между n и (n + 1), с началом отсчета от $t_{(\gamma+1)}$.

В (19а) учитываются влияния всех переходов в i-е состояние.

Далее приведем численные эксперименты по проверке соблюдения свойств (2а), (2в), (2с) матриц и по проверке процедуры использования алгоритма (19а) при диагностировании.

Рассмотрим два варианта эксперимента по определению элементов $g_{ij(l)}^{(\gamma)}$ матрицы $\bar{Q}_{l}^{(\gamma)}$, где нижний индекс l – номер варианта, $l\in\{1,2\}$.

При расчетах для первого варианта использовались данные:

$$\lambda_{1б} = 1{,}1873449 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};\ \lambda_{2б} = 2{,}4389027 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};$$

$$\lambda_{в1} = 1{,}3897222 \cdot 10^{-6}\ {}^{1}\!/_{ч};\ \lambda_{в2} = 1{,}3958888 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};$$

$$t_0 = 0;\ t_1 = 4320\ ч;\ t_2 = 5040\ ч;\ t_3 = 9780\ ч;\ t_4 = 10080\ ч.$$

Для второго варианта использовались

$$\lambda_{1б} = 5{,}1653611 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};\ \lambda_{2б} = 8{,}2563657 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};$$

$$\lambda_{в1} = 4{,}2304583 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч};\ \lambda_{в2} = 7{,}1240694 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{ч}.$$

Временные сечения те же, что и в первом варианте.

Далее воспользуемся выражениями (14) или (15) и данными матриц вариантов эксперимента.

Имеем для первого варианта эксперимента:

– при $\gamma = 1$:

$$\left(P_{1в}\right)^1 = \begin{pmatrix} 0{,}894406133 & 0{,}047074016 & 0{,}058519851 \\ 0{,}933465849 & 0{,}066534151 & 0 \\ 0{,}995821116 & 0 & 0{,}00417888 \end{pmatrix}; \qquad (20a)$$

– при $\gamma = 2$:

$$\left(P_{1в}\right)^2 = A_{1в}\left(\lambda^2\right)A_{1в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}90217949239419 & 0{,}0452352989748 & 0{,}052585014483 \\ 0{,}89700481254516 & 0{,}04836875553201 & 0{,}05462623192284 \\ 0{,}8948299031435 & 0{,}0468772824614 & 0{,}05829271481299 \end{pmatrix}; \qquad (20в)$$

– при $\gamma = 3$:

$$\left(P_{1в}\right)^3 = A_{1в}\left(\lambda^3\right)A_{1в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9015056167 & 0{,}045478883049 & 0{,}05301510550862 \\ 0{,}90183501466256 & 0{,}04544377187787 & 0{,}0527208189222 \\ 0{,}9021487780047 & 0{,}04524216167853 & 0{,}05260886614605 \end{pmatrix}; \qquad (20c)$$

– при $\gamma = 4$:

$$\left(P_{1в}\right)^4 = A_{1в}\left(\lambda^4\right)A_{1в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}90155866079439 & 0{,}04546337229489 & 0{,}05297747221227 \\ 0{,}9015274433644 & 0{,}04547654312358 & 0{,}05299551878412 \\ 0{,}90150839556565 & 0{,}04547789501681 & 0{,}05301341467845 \end{pmatrix}. \qquad (20d)$$

Для второго варианта эксперимента имеем:

– при $\gamma = 1$:

$$\left(P_{2в}\right)^1 = \begin{pmatrix} 5,5999993 \cdot 10^{-1} & 1,3999997 \cdot 10^{-1} & 3,000001 \cdot 10^{-1} \\ 7,3789004 \cdot 10^{-1} & 2,6211 \cdot 10^{-1} & 0 \\ 9,9188059 \cdot 10^{-1} & 0 & 8,1194 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}; \qquad (21а)$$

– при $\gamma = 2$:

$$\left(P_{2в}\right)^2 = A_{2в}\left(\lambda^2\right)A_{2в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7145005203928 & 0,11510131274032 & 0,1704680562264 \\ 0,60654164481308 & 0,17199026344896 & 0,22134171324625 \\ 0,56353175617944 & 0,13885387477876 & 0,2976169543816 \end{pmatrix}; \qquad (21в)$$

– при $\gamma = 3$:

$$\left(P_{2в}\right)^3 = A_{2в}\left(\lambda^3\right)A_{2в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,65414271121228 & 0,13020048138388 & 0,21574931913465 \\ 0,68611496014168 & 0,12999556850214 & 0,1837760619728 \\ 0,71322201254252 & 0,11528666630482 & 0,17149433341385 \end{pmatrix}; \qquad (21c)$$

– при $\gamma = 4$:

$$\left(P_{2в}\right)^4 = A_{2в}\left(\lambda^4\right)A_{2в}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6763889161742 & 0,12570642994444 & 0,19801046182475 \\ 0,66242679877644 & 0,13012850546908 & 0,20733951417325 \\ 0,65458106535512 & 0,13007009767448 & 0,2153742902268 \end{pmatrix}. \qquad (21d)$$

Результаты расчетов $\bar{Q}_L^{(\gamma)}$ представим матрицами:

$$\bar{Q}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 7,7117 \cdot 10^{-7} & -1,82411 \cdot 10^{-7} & -5,88768 \cdot 10^{-7} \\ -3,61716 \cdot 10^{-6} & -1,80212 \cdot 10^{-6} & 5,41927 \cdot 10^{-6} \\ -1,0019 \cdot 10^{-5} & 4,65052 \cdot 10^{-6} & 5,56843 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}; \qquad (22а)$$

$$\bar{Q}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -6,68527 \cdot 10^{-8} & 2,41651 \cdot 10^{-8} & 4,26678 \cdot 10^{-8} \\ 4,79187 \cdot 10^{-7} & -2,90177 \cdot 10^{-7} & -1,89029 \cdot 10^{-7} \\ 7,26079 \cdot 10^{-7} & -1,62214 \cdot 10^{-7} & -5,63874 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}; \qquad (22в)$$

$$\bar{Q}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 5,26231\cdot10^{-9} & -1,53877\cdot10^{-9} & -3,73346\cdot10^{-9} \\ -3,0513\cdot10^{-8} & 3,25112\cdot10^{-9} & 2,7252\cdot10^{-8} \\ -6,353\cdot10^{-8} & 2,33862\cdot10^{-8} & 4,01338\cdot10^{-8} \end{pmatrix}; \qquad (22c)$$

$$\bar{Q}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,53274\cdot10^{-5} & -2,4701\cdot10^{-6} & -1,21505\cdot10^{-5} \\ -1,30306\cdot10^{-5} & -8,94045\cdot10^{-6} & 2,19585\cdot10^{-5} \\ -4,24907\cdot10^{-5} & 1,37725\cdot10^{-5} & 2,87041\cdot10^{-5} \end{pmatrix}; \qquad (23a)$$

$$\bar{Q}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -5,98788\cdot10^{-6} & 1,49793\cdot10^{-6} & 4,49219\cdot10^{-6} \\ 7,89418\cdot10^{-6} & -4,16614\cdot10^{-6} & -3,72675\cdot10^{-6} \\ 1,48502\cdot10^{-5} & -2,33802\cdot10^{-6} & -1,25122\cdot10^{-5} \end{pmatrix}; \qquad (23в)$$

$$\bar{Q}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 2,20696\cdot10^{-6} & -4,45838\cdot10^{-7} & -1,75981\cdot10^{-6} \\ -2,35002\cdot10^{-6} & 1,31882\cdot10^{-8} & 2,33764\cdot10^{-6} \\ -5,81755\cdot10^{-6} & 1,46661\cdot10^{-6} & 4,35303\cdot10^{-6} \end{pmatrix}. \qquad (23c)$$

Анализ данных (22a–22c), (23a–23c) показывает, что условия баланса (2) выполняются и в первом, и во втором вариантах эксперимента. При этом отметим, что точность оценивания $\bar{g}_{ji(l)}^{(\gamma)}$ (в относительных единицах) достаточно высокая и составляет ≈ 0,1 %.

Данные (22a–22c), (23a–23c) позволят теперь оценить вероятность состояний систем в произвольные моменты интервалов времени $\left(t_\gamma; t_{(\gamma+1)}\right)$.

В соответствии с (19a) для первого варианта, иллюстративно при $t = 7000$ ч, получили:

– для $\gamma = 1$:

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=1}^* = 7000\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot e^{7000\left(\bar{q}_{11}^{(1)}=1,7396856\cdot10^{-6}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\times$$
$$\times e^{7000\left(\bar{q}_{21}^{(1)}=-8,9182539\cdot10^{-6}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot e^{7000\left(\bar{q}_{31}^{1}=-1,3540674\cdot10^{-5}\right)} = 0,9429505128,$$

где $P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)$ определяется так:

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{1б}(t_4-t_1)}\cdot e^{-(\lambda_{2б}+\lambda_{в2})(t_4-t_3)} = 0,926106187;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{2б}(t_2-t_1)}\cdot e^{-\lambda_{в1}(t_2-t_1)}\left(1-e^{-\lambda_{1б}(t_2-t_1)}\right) = 0,008418894;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{1б}(t_4-t_1)}\cdot e^{-\lambda_{в2}(t_4-t_3)}\left(1-e^{-\lambda_{2б}(t_4-t_3)}\right) = 0,00388633.$$

Для $\gamma = 2$ будем иметь

$$P_{c1}\left(t^*_{\gamma=2} = 7000\right) =$$

$$= P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{11}^{(2)}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{21}^{(2)}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{31}^{(2)}\right)} = 0,938442891,$$

где

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{11}^{(1)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{21}^{(1)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{31}^{(1)} = 0,84004386;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{12}^{(1)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{22}^{(1)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{32}^{(1)} = 0,04415566;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{13}^{(1)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{23}^{(1)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P_{33}^{(1)} = 0,054211789.$$

Для $\gamma = 3$ получим

$$P_{c1}\left(t^*_{\gamma=3} = 7000\right) =$$

$$= P_{c1}\left(t_{\gamma=3}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{11}^{3}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=3}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{21}^{(3)}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=3}\right)e^{7000\left(\bar{q}_{31}^{(3)}\right)} = 0,938411383,$$

где

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{11}^{(2)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{21}^{(2)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{31}^{(2)} = 0,846543402;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{12}^{(2)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{22}^{(2)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{32}^{(2)} = 0,042482082;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{13}^{(2)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{23}^{(2)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P_{33}^{(21)} = 0,049385744.$$

Для второго варианта получены следующие данные:

– для $\gamma = 1$:

$$P_{c1}\left(t^*_{\gamma=1} = 7000\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot e^{7000\left(\bar{q}_{11}^{(1)}=1,53274\cdot 10^{-5}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\times$$

$$\times e^{7000\left(\bar{q}_{21}^{(1)}=-1,30306\cdot 10^{-5}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot e^{7000\left(\bar{q}_{31}^{1}=-1,42035\cdot 10^{-5}\right)} = 0,836046207,$$

где $P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)$ определяется так:

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{1б}\left(t_4-t_1\right)}\cdot e^{-\left(\lambda_{2б}+\lambda_{в2}\right)\left(t_4-t_3\right)} = 0,709165676;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{2б}\left(t_2-t_1\right)}\cdot e^{-\lambda_{в1}\left(t_2-t_1\right)}\left(1-e^{-\lambda_{1б}\left(t_2-t_1\right)}\right) = 0,03336853;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right) = e^{-\lambda_{1б}\left(t_4-t_1\right)}\cdot e^{-\lambda_{в2}\left(t_4-t_3\right)}\left(1-e^{-\lambda_{2б}\left(t_4-t_3\right)}\right) = 0,017784743.$$

Для $\gamma = 2$ будем иметь

$$P_{c1}\left(t^{*}_{\gamma=2} = 7000\right) =$$

$$= P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{(2)}_{11}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{(2)}_{21}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{(2)}_{31}\right)} = 0{,}808589396,$$

где

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{11} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{21} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{31} = 0{,}439395418;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{12} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{22} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{32} = 0{,}108029399;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{13} + P_{c2}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{23} + P_{c3}\left(t_{\gamma=1}\right)\cdot P^{(1)}_{33} = 0{,}21289614.$$

Для $\gamma = 3$ получим

$$P_{c1}\left(t^{*}_{\gamma=3} = 7000\right) =$$

$$= P_{c1}\left(t_{\gamma=3}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{3}_{11}\right)} + P_{c2}\left(t_{\gamma=3}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{(3)}_{21}\right)} + P_{c3}\left(t_{\gamma=3}\right) e^{7000\left(\bar{q}^{(3)}_{31}\right)} = 0{,}761928358,$$

где

$$P_{c1}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{11} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{21} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{31} = 0{,}536960913;$$

$$P_{c2}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{12} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{22} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{32} = 0{,}089834443;$$

$$P_{c3}\left(t_{\gamma=3}\right) = P_{c1}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{13} + P_{c2}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(2)}_{23} + P_{c3}\left(t_{\gamma=2}\right)\cdot P^{(21)}_{33} = 0{,}133568982.$$

Из результатов численных экспериментов видно, что использование цепей Маркова с непрерывным временем позволяет оценить (спрогнозировать, установить диагноз) состояния системы в любых точках временного интервала между моментами контроля их состояния. При этом результаты диагностирования в различных t_{γ}-сечениях – основа для прогнозирования значений контролируемых параметров систем. Следует отметить, что предложенный метод контроля (диагностирования) состояний реализуется достаточно простым алгоритмом, представленным аналитически выражением (19а), и обладает высокой чувствительностью.

Так, сравнивая результаты оценивания $P_{ci}\left(t^{*}_{\gamma\in\{1,2,3\}}\right)$ первого и второго вариантов эксперимента, можно видеть, что в первом случае процесс Маркова существенно более устойчив: при $\gamma = 2$ и $\gamma = 3$ $P_{c1}\left(t_{\gamma}\right)$ практически совпадают, а во втором случае $P_{c1}\left(t_{\gamma}\right)$ существенно расходятся.

Отсюда также следует, что контроль в промежуточных точках позволяет выяснить устойчивость (неустойчивость) цепей Маркова и их асимптотические свойства и на основе этого, в свою очередь, спрогнозировать (оценить) свойства процессов, происходящих в исследуемых биологических или экологических системах.

Список литературы

1. **Кельберт, М. Я.** Вероятность и статистика в примерах и задачах. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения / М. Я. Кельберт, Ю. М. Сухов. – М. : Изд-во МЦНМО, 2010. – 559 с.
2. **Рыжаков, В. В.** Разработка математической модели системы оценивания полисостава газовых сред и алгоритма оценивания ее параметров по данным натурного эксперимента / В. В. Рыжаков, М. В. Рыжаков // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3. – С. 99–104.
3. **Мазей, Ю. А.** Видовой состав и распределение раковинных амеб в некоторых водоемах и водотоках Среднего Поволжья / Ю. А. Мазей, А. В. Киреев, Е. А. Малышева // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. – 2011. – № 25. – С. 519–523.
4. **Рыжаков, В. В.** Теория и алгоритмы диагностирования и прогнозирования состояния технических систем длительного применения на основе цепей Маркова : моногр. / В. В. Рыжаков, М. В. Рыжаков. Депонирована ВИНИТИ РАН 27.03.2013, № 88-В2013. – 55 с.

References

1. **Kel'bert, M. Ya.** Veroyatnost' i statistika v primerakh i zadachakh. Markovskie tsepi kak otpravnaya tochka teorii sluchaynykh protsessov i ikh prilozheniya / M. Ya. Kel'bert, Yu. M. Sukhov. – M. : Izd-vo MTsNMO, 2010. – 559 s.
2. **Ryzhakov, V. V.** Razrabotka matematicheskoy modeli sistemy otsenivaniya polisostava gazovykh sred i algoritma otsenivaniya ee parametrov po dannym naturnogo eksperimenta / V. V. Ryzhakov, M. V. Ryzhakov // Trudy MFTI. – 2011. – T. 3. – S. 99–104.
3. **Mazei, Yu. A.** Vidovoy sostav i raspredelenie rakovinnykh ameb v nekotorykh vodoemakh i vodotokakh Srednego Povolzh'ya / Yu. A. Mazei, A. V. Kireev, E. A. Malysheva // Izvestiya PGPU im. V. G. Belinskogo. – 2011. – № 25. – S. 519–523.
4. **Ryzhakov, V. V.** Teoriya i algoritmy diagnostirovaniya i prognozirovaniya sostoyaniya tekhnicheskikh sistem dlitel'nogo primeneniya na osnove tsepey Markova : monogr. / V. V. Ryzhakov, M. V. Ryzhakov. Deponirovana VINITI RAN 27.03.2013, № 88-V2013. – 55 s.

Рыжаков Виктор Васильевич
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технического управления качеством, заслуженный деятель науки РФ, Пензенская государственная технологическая академия
(г. Пенза, проезд Байдукова, 1а)

Ryzhakov Viktor Vasil'evich
Doctor of engineering sciences, professor, head of sub-department of technical quality management, Honoured Scientist of the Russian Federation, Penza State Technological Academy
(Penza, 1a Baidukova passage)

E-mail: rvv@pgta.ru

Рыжаков Михаил Викторович
старший преподаватель, кафедра прикладной механики, заведующий лабораторией прикладных нанотехнологий, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9)

E-mail: mryzhakov@applmech.mipt.ru

Ryzhakov Mikhail Viktorovich
Senior lecturer, sub-department of applied mechanics, head of laboratory of modern nanotechnologies and ecology studies, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow Region, Dolgoprydny, 9 Institutsky lane)

УДК 519.21.248+57+574

Рыжаков, В. В.

Приложение осредненных *Q*-матриц в экологии и биологии при диагностировании и прогнозировании систем с длительным сроком жизни (применения) и с конечным числом состояний / В. В. Рыжаков, М. В. Рыжаков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2013. – № 1 (1). – С. 60–71.